

Pirâmides e Cones

Geometria espacial — aula 3

PCILS

Programa de
**Capacitação
e Integração
de Lideranças
Sociais**

GEOMETRIA

CIÊNCIAS EXATAS

Professores:

Roberto Ierusalimschy
Gabriel Coutinho de Paula
Diego Barreto Foguel

Realização:

PECEP
pré-vestibular social

Rio
PREFEITURA

Patrocínio:

INTEGRAÇÃO
METROPOLITANA

hizara
hizara.Rio

Objetivos da aula

O que vamos aprender hoje:

- Retomar prismas e cilindros (Aula 2)
- Definir e classificar **pirâmides**
- Identificar os elementos da pirâmide
- Usar as relações métricas da pirâmide
- Planificar pirâmides
- Calcular área lateral, total e volume de pirâmides
- Definir e identificar elementos do **cone**
- Diferenciar cone reto e oblíquo
- Relacionar raio, altura e geratriz
- Planificar cones
- Calcular área lateral, total e volume de cones
- Resolver exercícios ao longo da aula

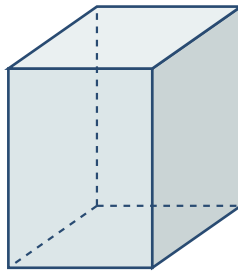
Revisão rápida – Aula 2

O que já vimos

Prisma:

- Duas **bases** poligonais congruentes e paralelas
- Faces laterais são paralelogramos

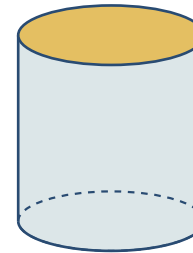
$$V = A_{\text{base}} \times h$$



Cilindro:

- Duas **bases** circulares congruentes e paralelas
- Superfície lateral curva

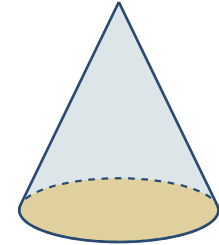
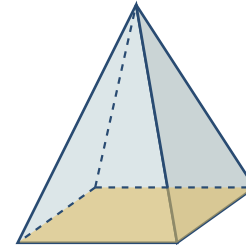
$$V = \pi r^2 \times h$$



Conectando com hoje

Nos prismas e cilindros, as duas bases são iguais. Hoje, um dos “lados” do sólido se fecha em um **único ponto**: o **vértice** (ou ápice).

- **Pirâmide**: base poligonal + um vértice
- **Cone**: base circular + um vértice



A pirâmide é um poliedro — faces, arestas e vértices, como na Aula 1. Já o cone **não** é um poliedro, pois sua superfície lateral é curva.

Parte 1 – Pirâmides

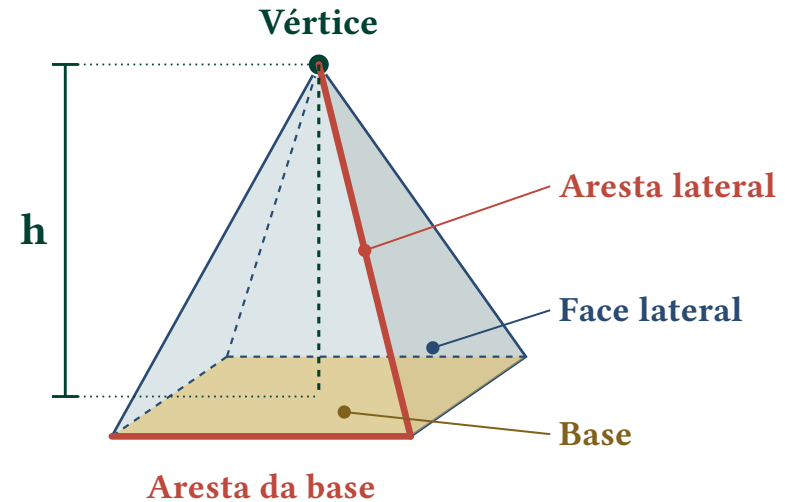
O que é uma pirâmide?

Definição: sólido geométrico limitado por:

- uma **base** poligonal
- **faces laterais** triangulares, que partem dos lados da base e se encontram em um mesmo ponto

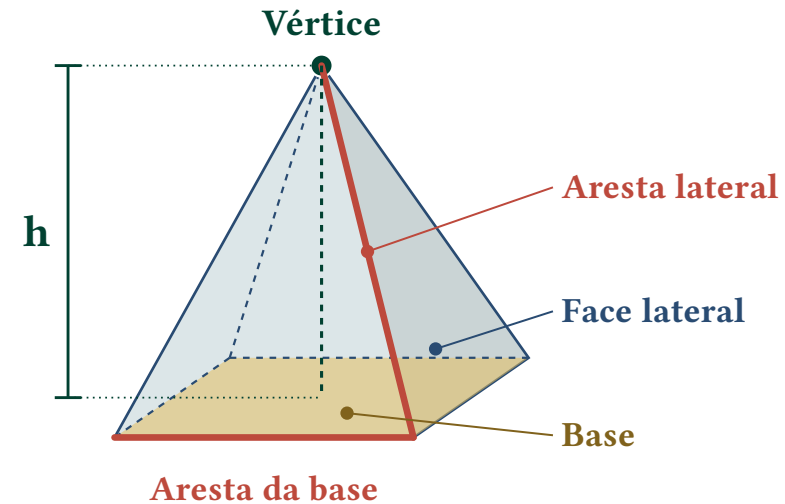
Esse ponto comum é o **vértice** (ou ápice) da pirâmide.

Exemplos do dia a dia: pirâmides do Egito, topo de uma barraca.



Elementos da pirâmide

- **Base:** o polígono que sustenta a pirâmide
- **Vértice (ápice):** ponto onde as faces laterais se encontram
- **Faces laterais:** triângulos que unem a base ao vértice
- **Arestas laterais:** segmentos que ligam o vértice aos vértices da base
- **Arestas da base:** lados do polígono da base
- **Altura (h):** distância do vértice ao plano da base



Classificação das pirâmides

Quanto à posição do vértice:

- **Reta:** o vértice fica exatamente acima do centro da base
- **Oblíqua:** o vértice não fica acima do centro da base

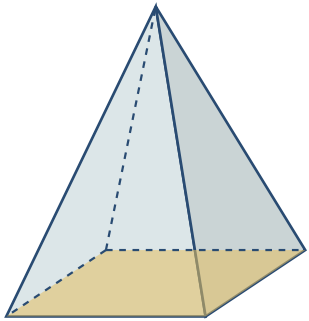
Quanto à base:

- **Regular:** pirâmide reta cuja base é um polígono regular
- Nomeada pela base: pirâmide **triangular**, **quadrangular**, **pentagonal**, **hexagonal**...

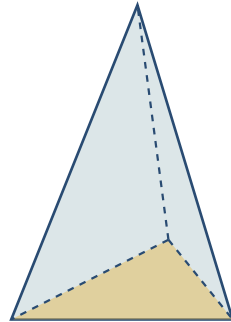
Pirâmide reta + base regular = Pirâmide Regular

Numa pirâmide regular, todas as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

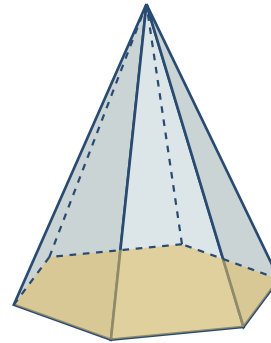
Exemplos de pirâmides



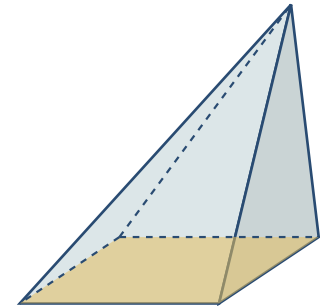
**Pirâmide quadrangular
regular**



**Pirâmide triangular
regular**



**Pirâmide hexagonal
regular**



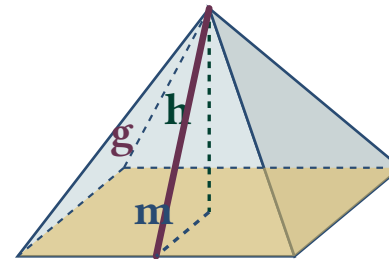
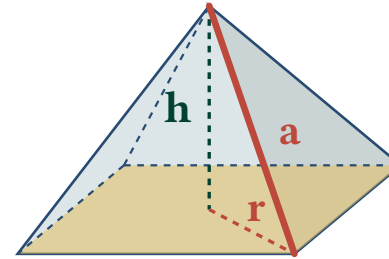
Pirâmide oblíqua

Relações métricas na pirâmide

Em uma pirâmide regular:

- **h**: altura da pirâmide
- **m**: apótema da base (centro até o meio de uma aresta da base)
- **g**: apótema da pirâmide (altura de uma face lateral)
- **a**: aresta lateral
- **r**: distância do centro da base até um de seus vértices

$$a^2 = h^2 + r^2 \quad g^2 = h^2 + m^2$$

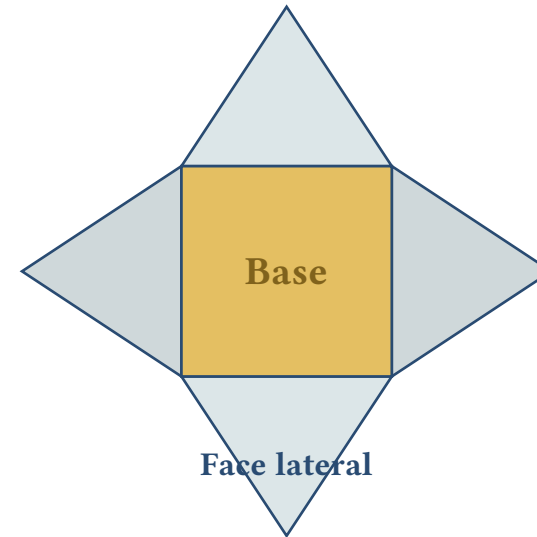


Planificação da pirâmide

A planificação de uma pirâmide é formada por:

- a **base** (um polígono)
- as **faces laterais** (triângulos)

Em uma pirâmide regular, os triângulos são todos congruentes, e a altura de cada um deles é o **apótema da pirâmide (g)**.

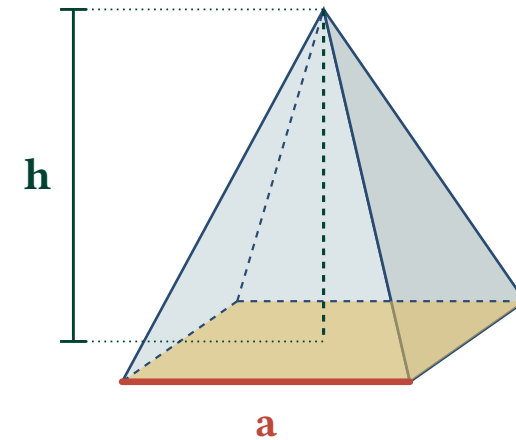


Área lateral e área total

Área lateral (A_l): soma das áreas dos triângulos das faces laterais

Área total (A_t): área lateral + área da base

$$A_t = A_l + A_{base}$$



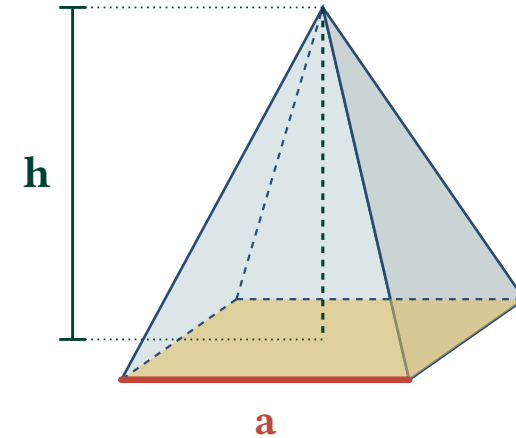
*Obs.: a pirâmide tem **uma** base só — por isso A_{base} aparece uma única vez, diferentemente de um prisma, em que ela aparece duas.*

Volume da pirâmide

Para **qualquer** pirâmide (reta ou oblíqua):

$$V = (A_{\text{base}} \times h) / 3$$

- A_{base} = área do polígono da base
- h = altura da pirâmide

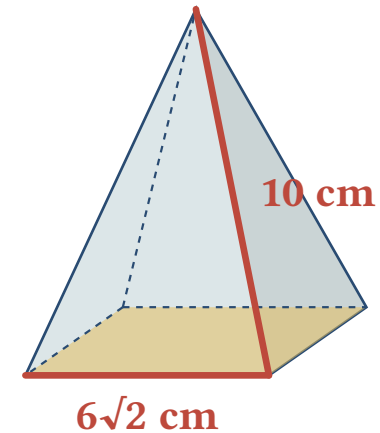


Três pirâmides de mesma base e mesma altura preenchem exatamente um prisma.

Exercício 1 – Pirâmide quadrangular regular

Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base de $6\sqrt{2}$ cm e aresta lateral de 10 cm. Calcule:

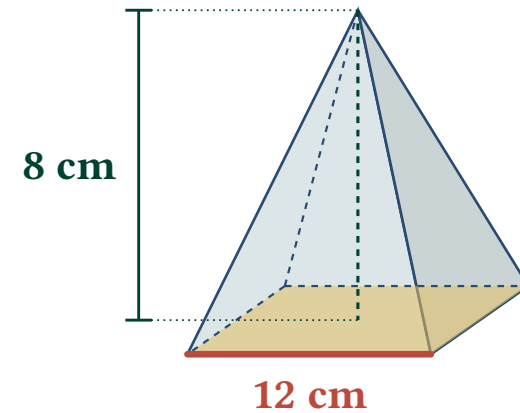
- a) A área da base
- b) O volume



Exercício 2 – Pirâmide quadrangular regular

Em uma pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede **12 cm** e a altura mede **8 cm**. Calcule:

- a) A área lateral
- b) A área total
- c) O volume



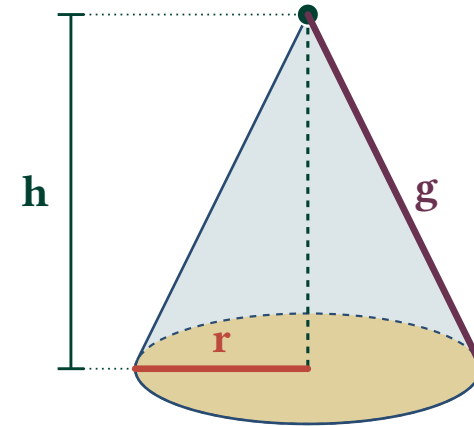
Parte 2 — Cones

O que é um cone?

Definição: sólido geométrico formado por uma base circular e por um **vértice** fora do plano dessa base, ligados por uma superfície curva. Também pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

Assim como o cilindro, o cone **não é um poliedro**: sua superfície lateral é curva.

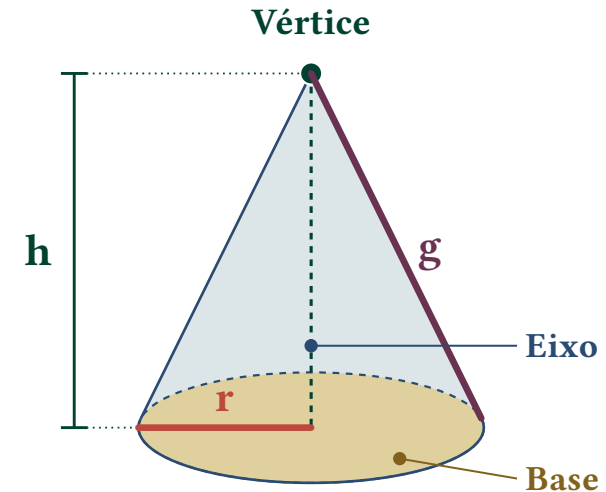
Exemplos: casquinha de sorvete, chapéu de festa, cone de trânsito, funil.



Elementos do cone

- **Base:** o círculo que sustenta o cone
- **Vértice:** ponto onde a superfície lateral se fecha
- **Eixo:** segmento do vértice ao centro da base
- **Altura (h):** distância do vértice ao plano da base
- **Geratriz (g):** segmento do vértice a um ponto da circunferência da base
- **Raio (r):** raio do círculo da base

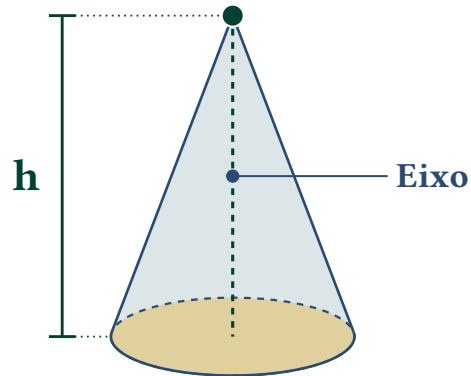
$$g^2 = h^2 + r^2$$



Cone reto x oblíquo

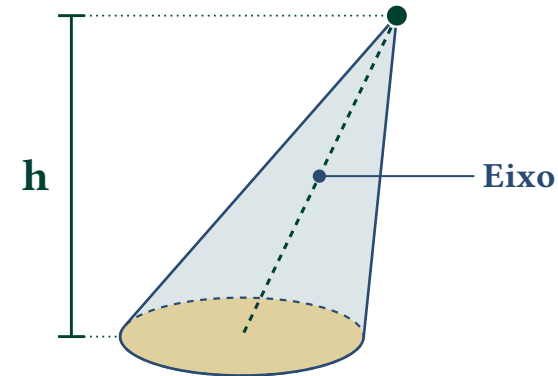
Cone reto:

- Vértice acima do centro da base
- Todas as geratrizes têm o mesmo comprimento



Cone oblíquo:

- Vértice fora do centro da base
- Fórmula do volume continua a mesma!

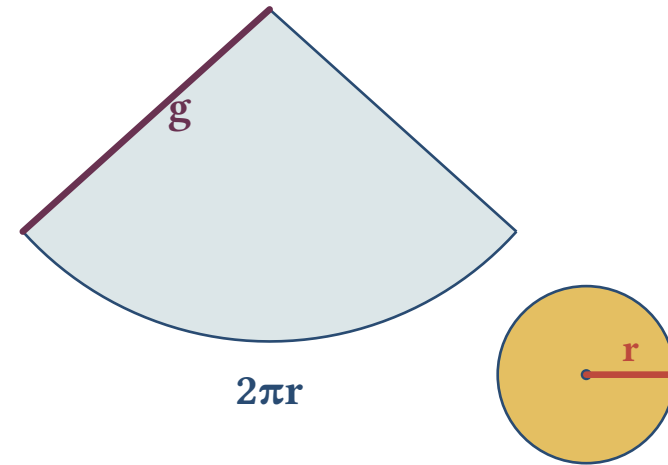


Planificação do cone

A planificação do cone reto é formada por:

- **um círculo** (a base)
- **um setor circular** (a superfície lateral aberta)

Atenção: o raio do setor é a **geratriz** (g) e o arco do setor tem o **comprimento da circunferência da base** ($2\pi r$).



Área lateral e área total

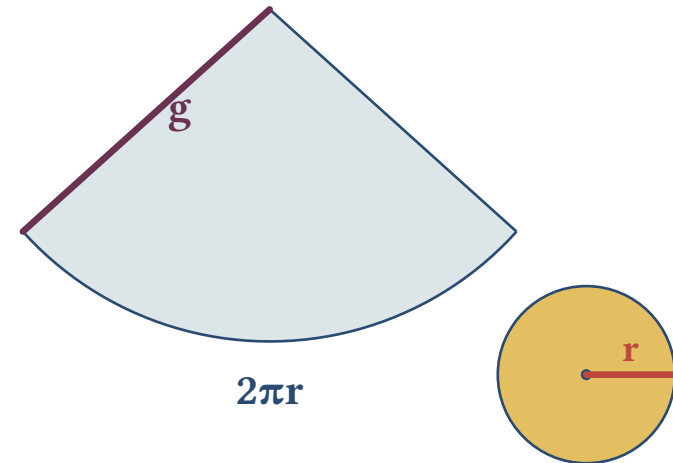
Área lateral (A_l):

$$A_l = \pi r g$$

Área total (A_t):

$$A_t = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A_t = \pi r (r + g)$$



Volume do cone

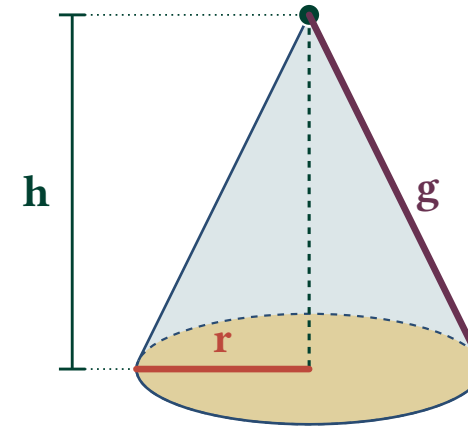
$$V = (\pi r^2 \times h) / 3$$

- r = raio da base
- h = altura do cone

Repare a semelhança com a pirâmide:

$$V = (A_{\text{base}} \times h) / 3$$

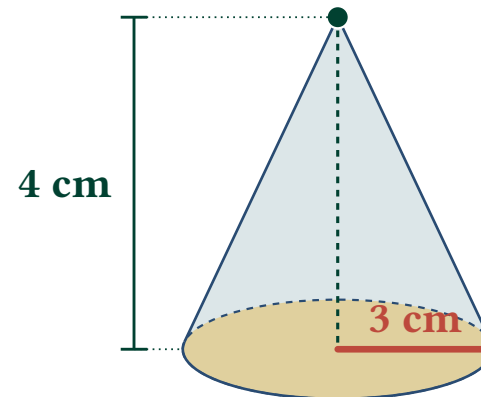
sendo $A_{\text{base}} = \pi r^2$.



Exercício 3 – Cone reto

Um cone reto tem raio da base de **3 cm** e altura de **4 cm**.
Determine:

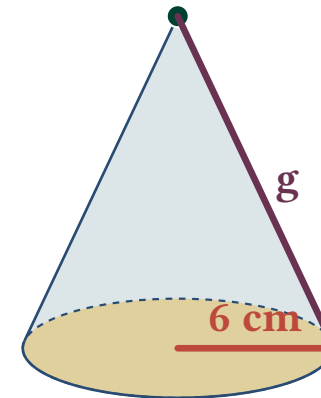
- a) A geratriz
- b) A área total
- c) O volume



Exercício 4 – Cone equilátero

Um **cone equilátero** é aquele em que a geratriz mede o dobro do raio ($g = 2r$). Sabendo que o raio da base mede **6 cm**, determine:

- a) A geratriz e a altura
- b) A área total
- c) O volume



Parte 3 — Secção e tronco de cone

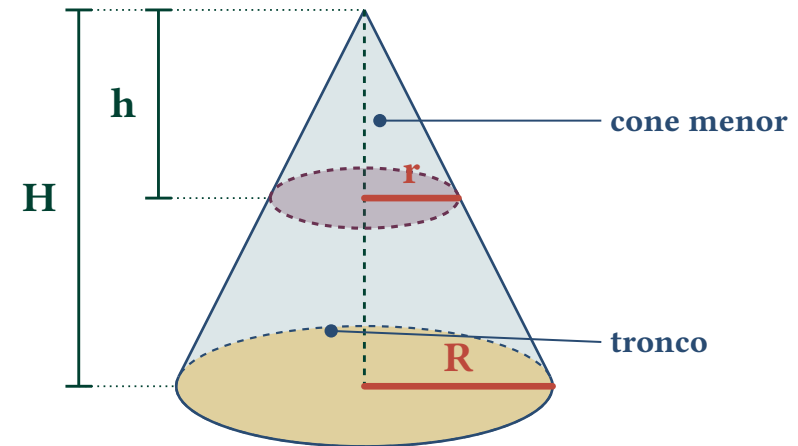
Secção paralela à base

Ao cortar um cone por um plano **paralelo à base**, ele fica dividido em duas partes:

- um **cone menor**, com o mesmo vértice
- um **tronco de cone**, entre as duas bases

O cone menor é **semelhante** ao cone original: todas as suas medidas lineares ficam multiplicadas pela mesma **razão de semelhança** k .

$$k = h / H = r / R = g / G$$

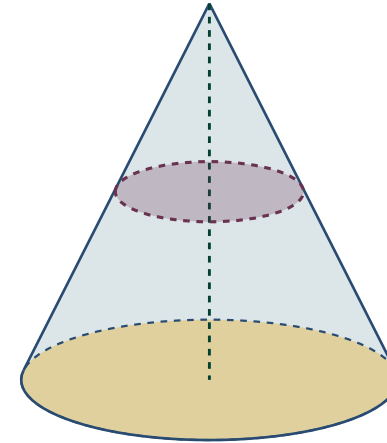


Razão de semelhança

Se as medidas lineares estão na razão k , então:

- **comprimentos** (raio, altura, geratriz): k
- **áreas** (base, lateral, total): k^2
- **volumes**: k^3

Exemplo: cortando o cone na metade da altura ($k = 1/2$), o cone menor tem $1/4$ da área da base e apenas $1/8$ do volume do cone original.

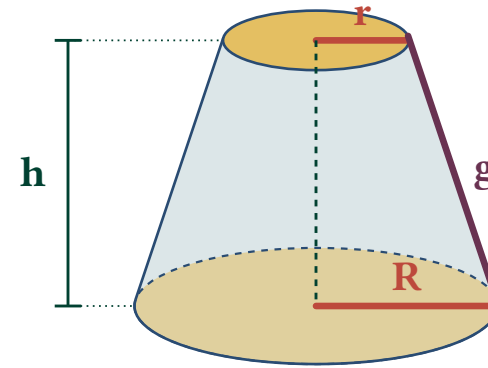


Tronco de cone

É a parte do cone que fica **entre a base e a secção** paralela a ela. Seus elementos:

- **R**: raio da base maior
- **r**: raio da base menor
- **h**: altura do tronco
- **g**: geratriz do tronco

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$



Áreas e volume do tronco

Área lateral:

$$A_l = \pi g (R + r)$$

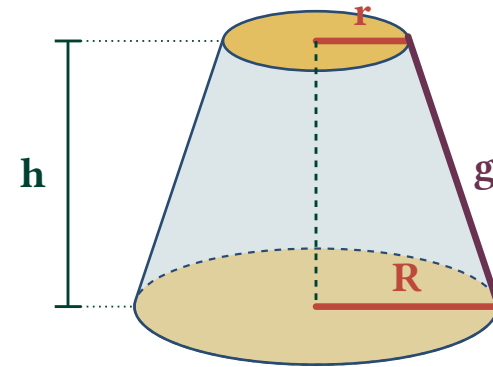
Área total:

$$A_t = A_l + \pi R^2 + \pi r^2$$

Volume:

$$V = (\pi h / 3) \cdot (R^2 + R r + r^2)$$

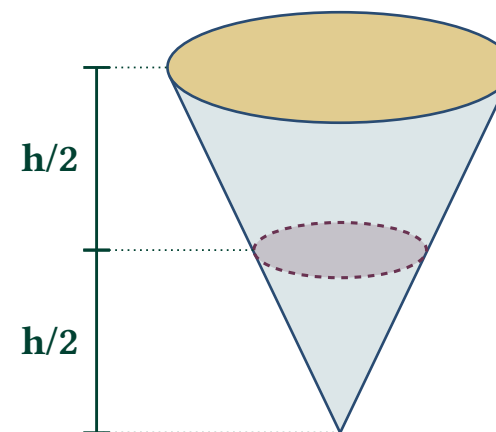
Na prática, também vale: volume do tronco = volume do cone maior – volume do cone menor.



Exercício 5 – Dividindo a bebida

O professor de Geometria e os alunos de sua turma vão dividir a bebida contida num copo em formato de cone. O professor faz a seguinte sugestão: “Vamos dividir a altura desse cone ao meio. Ficarei com a metade de cima e vocês, alunos, com a metade de baixo. Dessa forma, eu fico com o mesmo tanto de bebida que vocês.”

- O que vocês acham da sugestão do professor? Ela está correta?
- Considerando que são **800 mL** totais de bebida, calcule o volume de bebida que cada parte ficaria ao seguir a sugestão do professor.



Resumo

Pirâmide:

$$A_l = (\text{perímetro da base} \times g) / 2$$

$$A_t = A_l + A_{\text{base}}$$

$$V = (A_{\text{base}} \times h) / 3$$

$$g^2 = h^2 + m^2$$

Base poligonal e um vértice.

Cone:

$$A_l = \pi r g$$

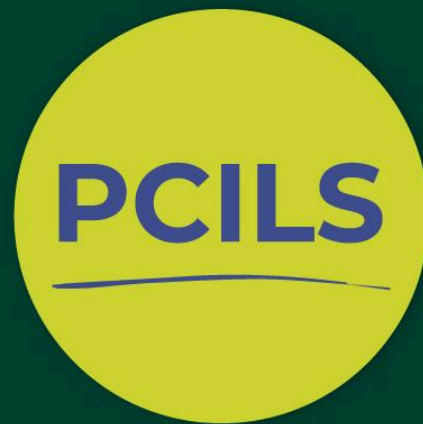
$$A_t = \pi r (r + g)$$

$$V = (\pi r^2 \times h) / 3$$

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Base circular e um vértice.

Na próxima aula: esferas!



Programa de Capacitação e Integração de Lideranças Sociais

Realização:



Patrocínio:



INTEGRAÇÃO
METROPOLITANA

